הטכניון - מכון טכנולוגי לישראל - הפקולטה למתמטיקה

חדו"א 2מ – 104022

מבחן סוף סמסטר מועד א', אביב - 16/07/2017

משך הבחינה שלוש שעות.
אין להשתמש בחומר עזר או באמצעי עזר מכל סוג שהוא, כולל מחשבון.
לבחינה שני חלקים: בחלק א' שאלות רב־ברירה ("אמריקאיות") ובחלק ב' שאלות "פתוחות". עבור כל אחת מהשאלות בחלק א' יש להקיף בעיגול את התשובה היחידה הנכונה. על השאלות בחלק ב' יש לענות באופן מלא בגוף השאלון במקום המיועד לכך.
אין לפרק את השאלון ויש להחזירו בשלמותו בתום הבחינה.

בהצלחה!

חלק א'

לכל אחת מן השאלות בחלק זה יש לבחור את התשובה הנכונה היחידה מבין האפשרויות הרשומות. יש להקיף בעיגול את התשובה הנכונה. סימון לא ברור, או סימון של יותר מתשובה אחת באותה שאלה, יפסול את תשובתך. משקל כל שאלה בחלק זה הוא 7 נקודות.

1. הגבול

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2^{xy}-1}{|x|+|y|}$$

א. אינו קיים

ב. 0

ג. $\ln(2)$

ד. ∞

ה. e^2

2. נתון כי $|\overline{n}|=1,\ |\overline{m}|=2$ וכי הזווית בין הווקטורים $\overline{n},\ \overline{m}$ היא $\frac{\pi}{6}$.
נגדיר $\overline{a}=2\overline{m}-\overline{n},\ \overline{b}=\overline{m}+2\overline{n}$. אז, שטח המשולש ששתיים מצלעותיו הם $\overline{a},\ \overline{b}$ הוא

א. $2\sqrt{3}$

ב. $\frac{3}{2}$

ג. $\frac{5}{2}$

ד. 3

ה. 5

3. נתונה הפונקציה $f(x,y,z)=x^2y^2z$. ערכה המקסימלי בתחום

$$\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3|\ x+y+z\le 5,\ x,y,z\ge 0\}$$

הוא

א. 32

ב. 18

ג. 16

ד. $\frac{625}{32}$

ה. 0

4. מטייל עומד בנקודה $(1,2,e^2)$ על הר שצורתו $z=f(x,y)=e^{8-2x^2-y^2}$. הוא מחליט לנוע משם בדרך שתשאיר אותו באותו קו גובה של ההר (כלומר, ש־z אינו משתנה). לאיזה כיוון במרחב עליו לפנות בתחילת תנועתו?

א. $(-2e^2,6e^2,-1)$

ב. $(2,1,0)$

ג. $(e,-e,0)$

ד. $(1,-1,-1)$

ה. $(1,1,1)$

5. תהי $z=f(x,y)$ פונקציה המוגדרת בצורה סתומה ע"י

$$5x^2y^2+3x^3yz+z^3xy=5.$$

אזי $z''_{x,y}(1,1)$

א. $\frac{20}{3}$

ב. $-\frac{20}{3}$

ג. $\frac{3}{20}$

ד. 1

ה. -20

6. תהי $f(x,y)\in C^1$ בכל המישור, המקיימת כי $f(x,y)=f(y,x)$ לכל $(x,y)\in\mathbb{R}^2$. אז הנגזרת המכוונת של f בנקודה $(0,0)$ בכיוון של הווקטור $(1,1)$ הוא

א. $\sqrt{2}\cdot f'_x(0,0)$

ב. $\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot f'_x(0,0)$

ג. 0

ד. $2\cdot f'_x(0,0)$

ה. $\frac{1}{2}\cdot f'_x(0,0)$

7. נתונה פונקציה $f(x,y)$ בעלת נגזרות חלקיות רציפות עד סדר שני בסביבת הראשית. ידוע כי פולינום טיילור מסדר שני של f סביב $(0,0)$ הוא $T_2(x,y) = 3 - \frac{x^2}{2} + xy - y^2$. אזי הנקודה $(0,0)$ היא

א. נקודת אוכף

ב. נקודת מינימום מקומי

ג. נקודת מקסימום מקומי

ד. אינה אקסטרמום מקומי ואינה אוכף

ה. לא ניתן לקבוע על סמך הנתונים

חלק ב'

יש לרשום בעמודים הבאים פתרון מלא ומנומק לשתי השאלות הבאות.

8. (25 נקודות)

(א) (5 נקודות)
הוכיחו כי השדה

$$\overline{F}(x,y) = \left(\frac{y}{1+x^2y^2}, \frac{x}{1+x^2y^2}\right)$$

הינו שדה משמר במישור, ומיצאו פונקציית פוטנציאל אחת.

(ב) (5 נקודות)
מיצאו את העבודה של השדה לאורך המסלול

$$\overline{r}(t) = \big(\cos(t) - \sin(t) - 1, \sin(t)\big) \qquad 0 \le t \le \pi.$$

(ג) (15 נקודות)
מיצאו את העבודה של השדה

$$\overline{G}(x,y) = \left(\frac{y}{1+x^2y^2} + y, \frac{x}{1+x^2y^2}\right)$$

לאורך המסלול

$$\overline{r}(t) = \big(\cos(t) - \sin(t) - 1, \sin(t)\big) \qquad 0 \le t \le \pi.$$

רמז: השתמשו בזהויות

$$\cos^2(t) = \frac{1+\cos(2t)}{2}, \quad \sin^2(t) = \frac{1-\cos(2t)}{2}$$

9. (26 נקודות)
(ציון שאלה זו יהיה 10% מגן בנוסף להיותה שאלה במבחן)
נתון השדה

$$\overline{F}(x,y,z) = (y^2 + x, -x, z^2)$$

והמשטח

$$S = \{(x,y,z) |\ x^2 + y^2 + z^2 = 1,\ y \geq 0\}$$

עם כיוון נורמל שבו רכיב y הוא אי־שלילי (כלומר הקואורדינטה השניה של הנורמל אי־שלילית).

(א) (3 נקודות)
חשבו את $\overline{\nabla} \times \overline{F}$.

(ב) (12 נקודות)
חשבו ישירות (ללא שימוש במשפטים) את $\iint\limits_S \left(\overline{\nabla} \times \overline{F}\right) \cdot \hat{n} \cdot dS$.

(ג) (11 נקודות)
עבור $a > 0$, יהי

$$S_a = \{(x,y,z) |\ x^2 + ay^2 + z^2 = 1,\ y \geq 0\}$$

עם כיוון נורמל שבו רכיב y הוא אי־שלילי (כלומר הקואורדינטה השניה של הנורמל אי־שלילית).
הוכיחו כי

$$\iint\limits_S \left(\overline{\nabla} \times \overline{F}\right) \cdot \hat{n} \cdot dS = \iint\limits_{S_a} \left(\overline{\nabla} \times \overline{F}\right) \cdot \hat{n} \cdot dS.$$